18/04/2016

π.χ

Έστω $V=\mathbb{R}^3$ με το κανονικό εσωτ. γινό-μενο και $W=<(1,0,0),(1,1,1)>$

i) Βρείτε την απεικόνιση ορθογώνιας προβολής $\Pi : V \to W$

ii) Βρείτε το σημείο του W πιο κοντά στο διάνυσμα $(1,2,3) \in \mathbb{R}^3$ (ως προς $<,>$)

Λύση

Βήμα 1:

Βρίσκουμε με Gram-Schmidt ορθοκανονική βάση του W

Ξεκινάμε με τη βάση $g_1=(1,0,0)$, $g_2=(1,1,1)$ του W

Θέτουμε $h_1 = g_1 = (1,0,0)$

$$h_2 = g_2 - \frac{\langle g_2, h_1 \rangle}{\|h_1\|^2} h_1 = (1,1,1)-(1,0,0)$$

$= (0,1,1)$ Θέτουμε

$e_1 = \frac{h_1}{\|h_1\|} = (1,0,0)$, $e_2 = \frac{h_2}{\|h_2\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,1) =$

$= \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

Τότε e_1, e_2 ορθοκανονική βάση του W

Άρα από τη θεωρία για $z=(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$ έχουμε

$\pi(z) = \pi((a,b,c)) = \langle z, e_1 \rangle e_1 + \langle z, e_2 \rangle e_2$

$= \langle (a,b,c),(1,0,0) \rangle (1,0,0) +$

$+ \langle (a,b,c), \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \rangle \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) =$

$= a(1,0,0) + \left(\frac{b+c}{\sqrt{2}}\right)\left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \left(a, \frac{b+c}{2}, \frac{b+c}{2}\right)$

ii) Από θεωρία, αν $z \in V \setminus W$, υπάρχει μοναδικό σημείο του W "πιο κοντά" στο z (δηλ. ελαχιστοποιείται η συνάρτηση $W \to \mathbb{R}$, $w \mapsto \|z-w\|$) και αυτό το σημείο είναι το $\pi(z)$.

Άρα για $z=(1,2,3)\in\mathbb{R}^3$, το σημείο του W "πιο κοντά" στο z είναι το $\pi((1,2,3)) = \left(1, \frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right)$

Ερώτημα.

Έστω $(V, \langle , \rangle)$ χ.ε.γ.
$e=(e_1,\dots,e_n)$ ορθοκανονική βάση στον V και $v\in V$. Αφού e βάση του V, υπάρχουν μοναδικά $\lambda_i \in \mathbb{R}$ ώστε
$v=\lambda_1e_1+\lambda_2e_2+\dots+\lambda_ne_n$. Υπάρχει εύκολος τρόπος υπολογισμού λ_i;

Ισχυρισμός: $\lambda_i = \langle v, e_i\rangle \quad \forall \; i=1,2,\dots,n$

Απόδειξη: Έχουμε $\langle v,e_i\rangle = \langle \lambda_1 e_1+\dots+\lambda_n e_n, e_i\rangle =$
$= \langle \lambda_1 e_1, e_i\rangle + \langle\lambda_2 e_2, e_i\rangle+\dots+\langle \lambda_n e_n, e_i\rangle =$
$= \lambda_1\langle e_1,e_i\rangle+\lambda_2\langle e_2,e_i\rangle+\dots+\lambda_n\langle e_n,e_i\rangle =$
Αλλά $e_1,\dots,e_n$ ορθοκ. βάση, άρα $= \lambda_i\langle e_i,e_i\rangle = \lambda_i$

π.χ.

Έστω $(\mathbb{R}^2, \langle,\rangle)$ με το σύνηθες εσωτ. γινόμενο, και
$$e=\left(e_1=\left(\frac{1}{\sqrt2},\frac{1}{\sqrt2}\right), e_2=\left(\frac{-1}{\sqrt2},\frac{1}{\sqrt2}\right)\right)$$ μια
ορθοκ. βάση του $\mathbb{R}^2$. Εκφράστε το $z=(a,b)\in\mathbb{R}^2$ ως γραμμικό συνδυασμό των e_1, e_2 χωρίς να λύσετε σύστημα.

Λύση

Έστω $z=\lambda_1e_1+\lambda_2e_2$. Από το προηγούμενο ερώτημα, έχουμε $\lambda_1=\langle z,e_1\rangle = \left\langle (a,b),\left(\frac{1}{\sqrt2},\frac{1}{\sqrt2}\right)\right\rangle =$
$$= \frac{a+b}{\sqrt2}$$

$\lambda_2 = \langle z, e_2 \rangle = \left\langle (a,b), \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \right\rangle = \frac{-a+b}{\sqrt{2}}$

Πόρισμα (σημαντικό)

Έστω $(V, \langle , \rangle)$ χ.ε.γ. $e_E = (e_1, \dots, e_n)$ ορθοκ. βάση του V. Τότε $\forall\, v \in V$ ισχύει $v = \langle v, e_1 \rangle e_1 + \langle v, e_2 \rangle e_2 + \dots + \langle v, e_n \rangle e_n$.

Ορισμός

Έστω $(V, \langle \rangle)$, $(V', \langle \rangle')$ δύο χ.ε.γ. Μια απεικόνιση $T: V \to V'$ λέγεται γραμμική ισομετρία αν T γραμμική, T 1-1 και επί και για κάθε $u, w \in V$: $\langle T(u), T(w) \rangle' = \langle u, w \rangle$

Πρόταση: Έστω $(V, \langle \rangle)$, $(V', \langle \rangle')$ δύο χ.ε.γ. $T: V \to V'$ απεικόνιση. Τ.Α.Ε.Ι.

i) T γραμμική ισομετρία

ii) T γραμμική, 1-1 επί και $\|T(v)\|' = \|v\|$ $\forall\, v \in V$. Όπου (υπενθύμιση) $\|z\|' = \sqrt{\langle z, z \rangle'}$, $\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$ για $v \in V$, $z \in V'$

Με άλλα λόγια μια γραμμική 1-1 και επί απεικόνιση είναι ισομετρία αν και μόνο αν διατηρεί τα μήκη

Απόδ

i)$\Rightarrow$ii) Αφού T γραμμική ισομετρία, είναι γραμμική, 1-1, και επί.

Έστω $v \in V$. Έχουμε $\|T(v)\|' = \sqrt{\langle T(v), T(v) \rangle'} =$

$\sqrt{\langle v,v\rangle} = \|v\|$

Απόδ. ii) $\Rightarrow$ i)

Υποθέτουμε $\|T(v)\| = \|v\|$ για κάθε $v \in V$

Εύκολα βλέπουμε ότι για $v, w \in V$

$\|v+w\|^2 = \langle v+w, v+w\rangle =$

$= \langle v,v\rangle + \langle w,w\rangle + 2\langle v,w\rangle =$

$= \|v\|^2 + \|w\|^2 + 2\langle v,w\rangle$ (1)

Άρα συνεπάγεται ότι $\langle v,w\rangle = \frac{\|v+w\|^2 - \|v\|^2 - \|w\|^2}{2}$

Ομοίως για $x, y \in V$ $\langle x,y\rangle =$ (2)

$= \frac{\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2}{2}$

Άρα, για $v, w \in V$

$\langle T(v), T(w)\rangle \overset{(2)}{=} \frac{\|T(v)+T(w)\|^2 - (\|T(v)\|)^2 \ldots}{2}$

T γραμμική

$= \frac{(\|T(v+w)\|)^2 - (\|T(v)\|)^2 - (\|T(w)\|)^2}{2}$

υπόθεση για IF

$= \frac{\|v+w\|^2 - \|v\|^2 - \|w\|^2}{2} \overset{(1)}{=} \langle v,w\rangle$ Άρα T

γραμμ. ισομετρία.

Παρατήρηση

Σε ένα χ.ε.γ. $(V, \langle\,\rangle)$ η σχέση (1) λέει ότι η συνάρτηση μήκους $\|\ \|$, προσδιορίζει μοναδικά το εσωτ. γινόμενο

Παρατήρηση

Αφού μια γραμμική ισομετρία, είναι γραμμική, 1-1 και επί, έχουμε ότι μια γραμμική ισομετρία είναι ισομορφισμός (με την έννοια της Γ.Α. I) Σαν πόρισμα, αν $(V,<>)$, $(V',<>')$ δύο χ.ε.γ. με $\dim_{\mathbb{R}} V$ πεπερασμένη, $\dim_{\mathbb{R}} V'$ πεπερασμένη και υπάρχει $T: V \to V'$ γραμμ. ισομετρία έπεται (από γραμμ. I) $\dim_{\mathbb{R}} V = \dim_{\mathbb{R}} V'$

Δηλαδή γραμμικά ισομετροι χώροι εσωτερικού γινομ. να έχουν την ίδια διάσταση

<u>Παρατήρηση</u>

Σε άλλα μαθήματα θα δούμε πιο ~~γενικές~~ γενικές έννοιες ισομετρίας.

<u>Π.χ</u>

i) Έστω $(V, \|\ \|)$ χ.ε.γ. και $f = id_V\ V \to V$ η ταυτοτική. Τότε η f είναι γραμμική ισομετρία. Πράγματι, έχουμε ότι f γραμμική 1-1 και επί

Έστω $v, w \in V$. Τότε $< f(v), f(w) > =$
$= < v, w >$. Άρα f γραμμική ισομετρία

ii) Έστω $V = \mathbb{R}^2$ με συνήθες εσωτερικό γινόμενο.

1) Ανάκλαση κατοπτρισμού

$T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $T(x, y) = (x, -y)$

(κατοπτρισμός ως προς τον άξονα των x-είναι ισομετρία, από πρόταση γιατί προφανώς T (γραμμική, 1-1 και επί) και για (x,y), $(x',y') \in \mathbb{R}^2$

$$\langle T(x,y), T(x',y')\rangle = \langle (x,-y),(x',-y')\rangle =$$
$$= xx' + (-y)(-y') = xx' + yy' = \langle (x,y),(x',y')\rangle$$

2) <u>Στροφές</u>

Έστω $\theta \in [0, 2\pi)$ και $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ η στροφή (αντίθετα από τη φορά των ρολογιών) κατά γωνία θ. Με άλλα λόγια $T((x,y)) = (x\cos\theta - y\sin\theta,\ x\sin\theta + y\cos\theta)$

Εύκολα βλέπουμε T γραμμική ισομετρία (Απόδειξη: Άσκηση!)

<u>Παρατήρηση</u>

Σε μερικά μαθήματα θα δούμε το Θεώρημα Euler το οποίο περιγράφει όλες τις ισομετρίες στο $\mathbb{R}^2$ με σύνθεση ισομετρίας γραμμικό και $\mathbb{R}^3$ με σύνθεση ισομ. γραμμικό

<u>Άσκηση</u>

Έστω $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ χ.ε.γ. και $T_1, T_2: V \to V$

Δ.ο.:

1) id_V γραμμική ισομετρία (το είχαμε καιρό)
2) Αν T_1 γραμμ. ισομετρία, τότε και η αντίστροφη συνάρτηση T_1 είναι γραμμική ισομετρία
3) Αν T_1, T_2 γραμμ. ισομετρ., τότε η σύνθεση

$T_2 \circ T_1 : V \to V$ είναι γραμμ. ισομετρία

<u>Πρόταση</u>

έστω $(V, \langle\,\rangle)$, $(V', \langle\,\rangle')$ δύο χ.ε.γ. με

$e = (e_1, \dots, e_n)$